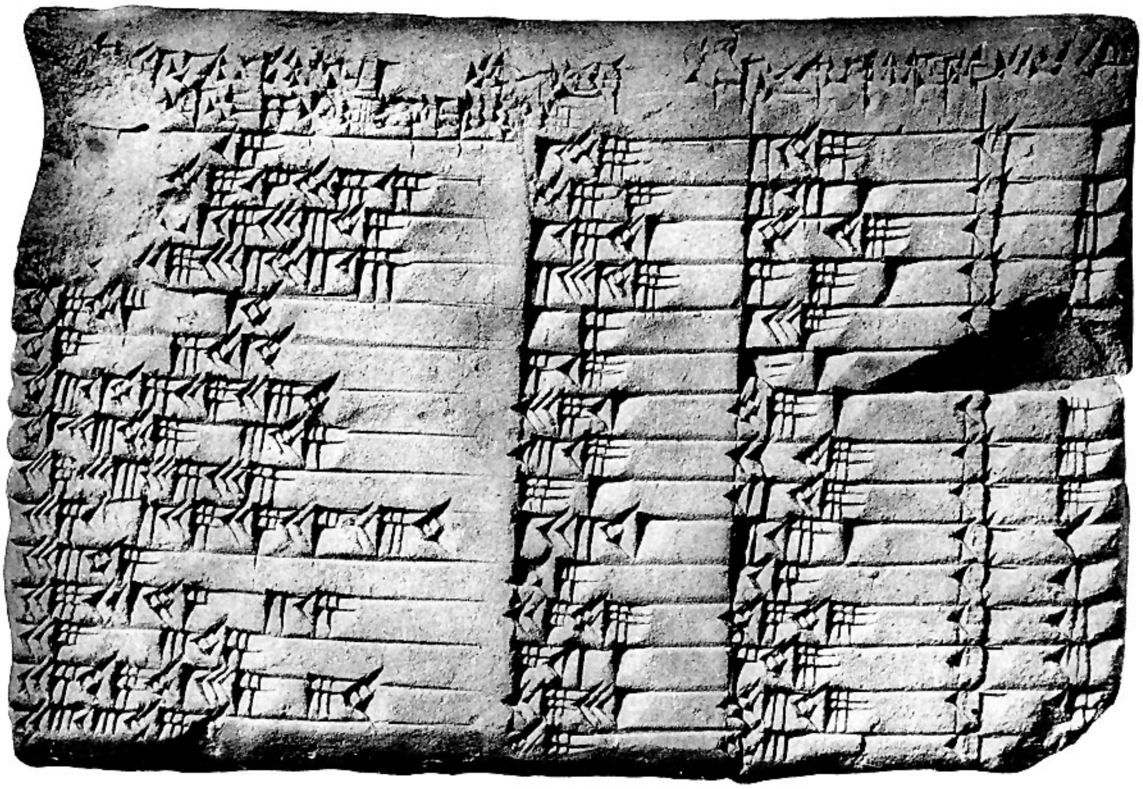
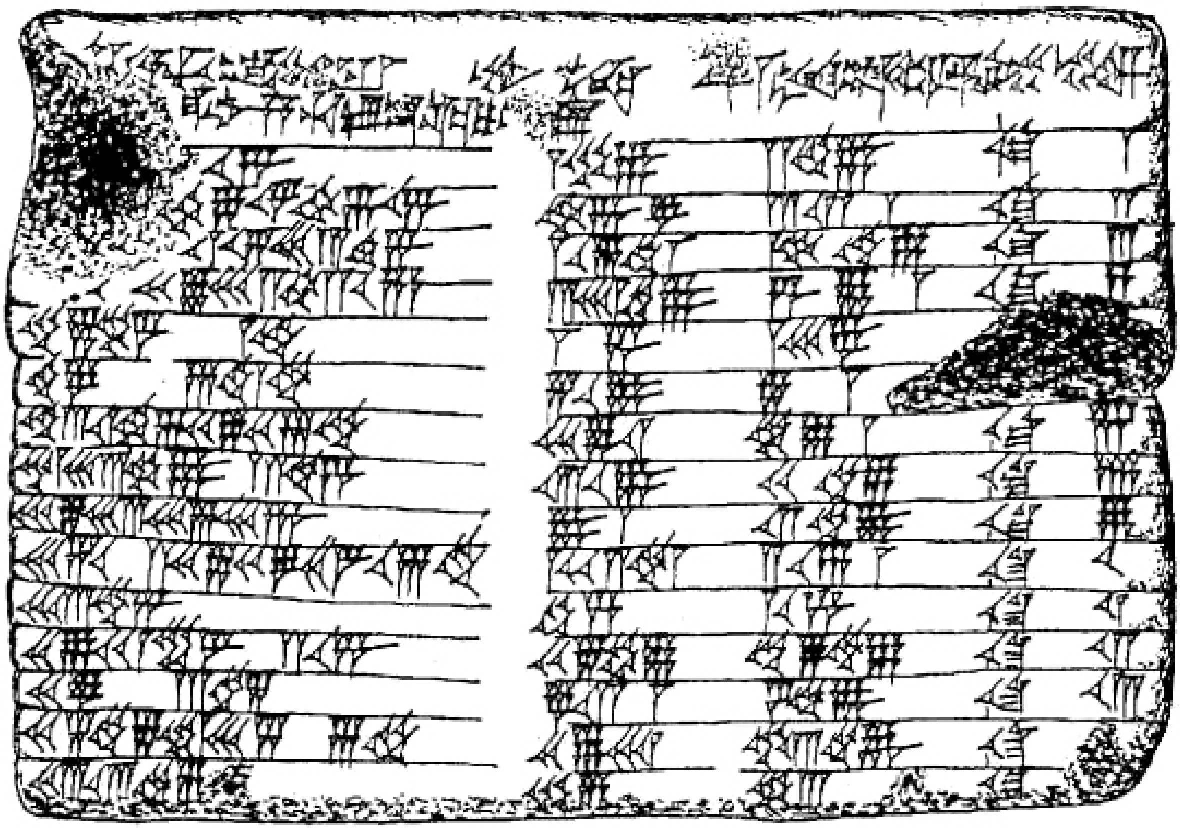
Plimpton 322

I. La tablette babylonienne Plimpton 322 et sa transcription





II. L'écriture babylonienne

Il y a quatre mille ans, les habitants de la Mésopotamie (Sumériens et Akkadiens), écrivaient sur des tablettes d'argile fraîche qu'ils laissaient sécher au Soleil. Elles se sont souvent très bien conservées, c'est pourquoi on connaît des textes très anciens de ces peuples.

Un certain nombre de tablettes contiennent des mathématiques. Les nombres y sont écrits en base 60, avec les deux seuls symboles suivants :

Notre division des angles ou des heures en soixantièmes est une survivance du système de numération des Babyloniens.

Par exemple, le nombre qu'ils écrivaient

se lit 15 2 34 et signifie $15\cdot\underline{60}^2 + 2\cdot\underline{60}^1 + 34\cdot\underline{60}^0$, soit 54154, de la même façon qu'en base $\underline{10}$, l'écriture 379 signifie $3\cdot\underline{10}^2 + 7\cdot\underline{10}^1 + 9\cdot\underline{10}^0$.

III. Traduction et interprétation de la tablette Plimpton 322

Une tablette écrite vers 1800 avant Jésus-Christ, connue sous le nom de *Plimpton 322* (du nom du collectionneur américain qui l'a recueillie), donne une liste de nombres, agencés en quatre colonnes. Elle a été déchiffrée et analysée pour la première fois par *Neugebauer* et *Sachs* en 1945. Elle comporte des lacunes dues à des cassures de l'argile et... des erreurs.

Étape 1

Écrivez les nombres inscrits sur la tablette avec des chiffres arabes, en base 60. Respectez la présentation de la tablette.
Écrivez ensuite ces nombres en base 10. Y a-t-il des problèmes de traduction dus au système babylonien ? Peut-on interpréter différemment les nombres écrits ? Quel chiffre manque au système babylonien ? Vérifiez votre traduction avec le corrigé ci-dessous :

En base 60 (les nombres entre [ ] ont disparu de la tablette) :

[1 59 0] 15	1 59	2 49	1
[1 56 56] 58 14 50 6 15	56 7	3 12 1	2
[1 55 7] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
[1] 5[3 1] 0 29 32 52 16	3 31 49	5 9 1	4
[1] 48 54 1 40	1 5	1 37	5
[1] 47 6 41 41	5 19	8 1	6
[1] 43 11 56 28 26 40	38 11	59 1	7
[1] 41 33 59 3 45	13 19	20 49	8
[1] 38 33 36 36	9 1	12 49	9
1 35 10 2 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 1	10
1 33 45	45	1 15	11
1 29 21 54 2 15	27 59	48 49	12
[1] 27 0 3 45	7 12 1	4 49	13
1 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	14
[1] 23 13 46 40	56	53	15

Étape 2

À quoi sert la colonne de droite ?
Observez les deux colonnes centrales. Trouvez-vous une relation entre ces nombres ?

Deux indices :

1. En fait il devrait y avoir 3 colonnes centrales. Une colonne a été supprimée car elle peut se déduire des deux autres.
   60 est le nombre manquant de la ligne 11, 72 celui de la ligne 5, 120 celui de la ligne 1.
2. Il est question de géométrie sur cette tablette.

Trouvez les autres nombres de la colonne supprimée.

Étape 3

Corrigez les erreurs de la tablette.
À quoi correspondent les nombres de la colonne de gauche ?
À quoi et à qui pouvait bien servir cette tablette ?

En base 10 (les * indiquent les erreurs probables du scribe) :

1.9834	119	169	1
1.9492	3367	11521 *	2
1.9188	4601	6649	3
1.8862	12709	18541	4
1.8150	65	97	5
1.7852	319	481	6
1.7200	2291	3541	7
1.6928	799	1249	8
1.6427	541 *	769	9
1.5861	4961	8161	10
1.5625	45	75	11
1.4894	1679	2929	12
1.4500	25921 *	289	13
1.4302	1771	3229	14
1.3872	56	53 *	15

Nombres corrigés (de haut en bas): 4825, 481, 161, 106.

IV. Compléments sur les bases

Définition

En arithmétique, une **base** désigne la valeur dont les puissances successives interviennent dans l'écriture des nombres, ces puissances définissant l'ordre de grandeur de chacune des positions occupées par les chiffres composant tout nombre.

Certaines bases sont couramment employées :

- la base 2 (système binaire), en électronique numérique et informatique,
- la base 8 (système octal), en informatique, davantage à l'échelle humaine que la base 2, aujourd'hui abandonnée au profit de la base 16.
- la base 10 (système décimal), la plus commune, aujourd'hui la référence dans le domaine des sciences,
- la base 12 (système duodécimal), de manière embryonnaire, a été utilisé par les Égyptiens pour le compte en heures et mois,
- la base 16 (système hexadécimal), en informatique, facilitant les conversions en base 2 en regroupant des chiffres binaires, 16 étant une puissance de 2,
- la base 20 (système vigésimal) a été utilisée par les Mayas et les Aztèques, et de manière alternative en France (dont on garde en héritage quatre-vingts)
- la base 60 (système sexagésimal), dans la mesure du temps et des angles, il a été utilisé par les Sumériens, les Akkadiens, puis les Babyloniens.

Nous utilisons le système décimal (base 10) dans nos activités quotidiennes. Ce système est basé sur une logique à dix symboles, de 0 à 9, avec une unité supérieure (dizaine, centaine, etc.) à chaque fois que dix unités sont comptabilisées.

C'est un système **positionnel**, c'est-à-dire que l'endroit où se trouve le symbole définit sa valeur. Ainsi, le 2 de 523 n'a pas la même valeur que le 2 de 132. En fait, 523 est l'abréviation de $5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$. On peut selon ce principe imaginer une infinité de systèmes numériques fondés sur des bases différentes.

Il est à noté que généralement en base N, on utilise N symboles. Jusqu'à la base 10, on utilise les chiffres de 0 à $N-1$. Pour les bases supérieures à 10, il faut des symboles supplémentaires. Ainsi, A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15.

Conversion décimal - binaire

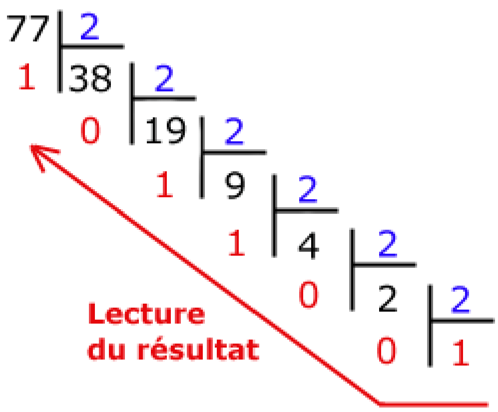
Convertissons 01001101 en décimal à l'aide du schéma ci-dessous :

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	1	0	0	1	0	1	1

Le nombre en base 10 est $2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 64 + 8 + 4 + 1 = 77$.

Conversion binaire - décimal

Allons maintenant dans l'autre sens et écrivons 77 en base 2. Il s'agit de faire une suite de divisions euclidiennes par 2. Le résultat sera la juxtaposition des restes. Le schéma ci-dessous explique la méthode :



V. Solutions

Étape 2

À quoi sert la colonne de droite ?

C'est simplement une numérotation des lignes

Observez les deux colonnes centrales. Trouvez-vous une relation entre ces nombres ?

Chaque nombre de la deuxième colonne le petit côté (a) d'un triangle rectangle.
Chaque nombre de la deuxième colonne est l'hypoténuse (c) d'un triangle rectangle.

Étape 3

À quoi correspondent les nombres de la colonne de gauche ?

C'est le rapport hypoténuse / petit côté $\left(\frac{c}{a}\right)$. C'est donc l'inverse du cosinus de l'angle compris entre le petit côté et l'hypoténuse.

L'inverse du cosinus s'appelle aussi la sécante.

À quoi et à qui pouvait bien servir cette tablette ?